Διαφορικές εξισώσεις.

10/01/2019

Διάλεξη 22η

Παράδειγμα 2: $\underset{a_2}{x^2}y'' - \underset{a_1}{(x^2+x)}y' + \underset{a_0}{y} = 0$, x_0: ανώμαλο σημείο

$$A_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\cdot x = \frac{-x^2-x}{x^2}\cdot x = -x-1, \quad p_0=-1, \quad R_1=+\infty$$

$$A_0(x) = \frac{1}{x^2}\cdot x^2 = 1, \quad q_0 = 1, \quad R_2 = +\infty$$

(*) Από $R_1, R_2 = +\infty$ προκύπτει ότι $R=+\infty$

$$\lambda^2 + (-1-1)\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 1$

Για $x>0$: $y_1(x) = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$, $c_0 = 1$

$$0 = x^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)nx^{n-1} - x^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)x^n +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)nx^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}nx^{n+1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \Rightarrow$$

$$0 = 0 - c_0x + c_0x + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\left[n(n+1)c_n - nc_{n-1} - (n+1)c_n + c_n\right]$$

$\Rightarrow c_n[n(n+1) - n - 1 + 1] = nc_{n-1}$, $n \geq 1$

$\Rightarrow c_n\cdot n\cdot n = nc_{n-1}$, $n\geq 1$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{n}c_{n-1}, \quad n\geq 1, \quad c_0 = 1}$$

Έτσι βρίσκω ότι:

$$y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = xe^x \quad , x>0$$

$$\boxed{y_1(x) = |x|e^x \quad , x>0}$$

Επίσης για $x>0$:

$$y_2(x) = y_1\log x + x\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \quad , d_0 = 0 \quad \cdot 1$$

$$y_2'(x) = y_1'\log x + y_1\frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(n+1)x^n \quad \cdot(-x^2+x)$$

$$y_2''(x) = y_1''\log x + 2y_1'\frac{1}{x} + y_1\left(\frac{1}{x^2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n\, n(n+1)\, x^{n-1} \cdot x^2$$

Έχω τώρα: $0 = x^2y_1'' - (x+x^2)y_1' + y_1$

$$\Rightarrow 0 = \log\left[x^2y_1'' - (x+x^2)y_1' + y_1\right] + x\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n - (x^2+x)\Big[x e^x \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(n+1)x^n\Big] + x^3 e^x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n\, n(n+1)\, x^{n-1}$$

(πράξεις)

. . . .

Μετά από πράξεις προκύπτει το $d_n = \frac{1}{n}d_{n-1} - \frac{1}{n \cdot n!}$, $n \geq 1$, $d_0 = 0$

το οποίο θεωρητικά επιλύεται. //

(iii) $\lambda_1-\lambda_2 \in \mathbb{Z}$

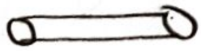
$$y_2(x)=C\cdot y_1(x)\log|x-x_0|+|x-x_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n,\quad |x-x_0|<R$$

Tip: Στην περίπτωση αυτή, λύνοντας μια άσκηση, θα προσπαθήσω να παρατηρήσω από τις σχέσεις που έχω βρει, αν οι σχέσεις αυτές εξαναγκάζουν την τιμή C να έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Αν όχι, τότε δίνω εγώ μια τιμή (όποια θέλω) στο C, για να πάρω μια γραμμική συνάρτηση. (θα δώσω προφανώς $C=1$)

-Τέλος με δυναμοσειρές-

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ (ΕΙΣΑΓΩΓΗ)

▶ Έστω $y''+y=0$ $\begin{cases} y(0)=a \\ y'(0)=B \end{cases}$ $\rightsquigarrow \exists$ ακριβώς μια λύση

(*) Έστω ότι έχω μια ράβδο: . Αν επιδράσω στα 2 άκρα (αυξάνοντας θερμοκρ. για παράδειγμα) 

ψάχνω να βρω τι γίνεται στο εσωτ. δηλαδή στην συνάρτηση y

πρόβλημα συνοριακών τιμών

Παρ. 4, σελ 134:

Έστω $y''+y=0$; $y(0)+y'(0)=0 \rightsquigarrow c_1+c_2=0$

$y(\pi)+y'(\pi)=0$

$\hookrightarrow y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x \;\Big\|\; y(0)=c_1 \;\Big\|\; y(\pi)=-c_1$

$y'(x)=-c_1\sin x+c_2\cos x \;\Big\|\; y'(0)=c_2 \;\Big\|\; y'(\pi)=-c_2$ $\Big\}\; -c_1-c_2=0$

άρα έπαιρνα $\left.\begin{array}{l} c_1+c_2=0 \\ -c_1-c_2=0 \end{array}\right\}$ $c_2=a$

$c_1=-a$

π.χ. (βιβλίο)

$y''+y=x$, $y(0)=2$, $y(\pi)=1$

Β.Σ.Θ. : $\{\cos x, \sin x\}$, x

$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x$, $x\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} y(0)=2 &\Rightarrow c_1=2 \\ y(\pi)=1 &\Rightarrow -c_1+\pi=1 \end{aligned}\right\} \underbrace{c_1=\pi-1 \wedge c_1=2}$$

αδύνατο ταυτόχρονα.

οπότε δεν έχω ούτε μία λύση.

Αν είχα $y(0)=2$ και $y(\pi/2)=1$, τότε το πρόβλημα έχει ακριβώς μία λύση

⋮

κ.ο.κ. με κατάλληλη αρχική τιμή θα έχω και άπειρες λύσεις.

~o~o~o~o

► $y''+\lambda y=0$ | συνοριακές συνθήκες.

↳ η πιο απλή περίπτωση θα ήταν να έχω απλές γραμμικές συνθήκες.

όπως: $\kappa_{1,2}y(a)+\lambda_{1,2}y'(a)+\mu_{1,2}y(b)+\sigma_{1,2}y'(b)=0$